Catégories enrichies

Antione Beaudet

lundi 16 décembre 2019

1 Introduction

Pas assez général pour vous, les catégories ?

Voyons voir comment on pourrait les généraliser.

Définition 1.1 (version interne)**.** Une *catégorie* $C = (C_0, C_1)$ est la donnée de fonctions

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i"] & C_1 \arrow[l, shift right=2ex, "s"'] \arrow[l, shift left=2ex, "p"] \end{tikzcd}$$

(source, puits, identité) et une fonction de composition

$$\circ : C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$$

sur le pullback des morphismes composables. Il y aussi un nombre de diagrammes qui doivent commuter exprimant les lois d'associativité etc.

Cette définition est essentiellement définie à l'intérieur d'une catégorie, elle se généralise alors bien vers les catégories internes.

Définition 1.2 (version enrichie)**.** Une *catégorie* C est la donnée d'un ensemble $\mathrm{Ob}(C)$ ainsi que, pour tous $c, d \in \mathrm{Ob}(C)$, un ensemble $C(c, d)$, munis d'une opération de composition, d'identités, etc.

Il est à noter qu'alors que la première version pouvait être définie à l'intérieur d'une catégorie avec pullbacks, la deuxième définit $C(-, -)$ comme un *type dépendant*, qui doit alors être définit dans les C/c – on a besoin d'une catégorie *localement cartésienne*. La deuxième est peut-être plus naturelle puisqu'elle sous-entend que les hom-ensembles sont disjoints.

Bref, ces deux notions sont en pratique équivalentes, mais elles suggèrent deux façons différentes de généraliser. Nous nous intéresserons principalement à la seconde.

2 L'enrichissement

Nous connaissons déjà plusieurs catégories enrichies. L'idée générale est que l'on donne aux ensembles de morphismes une structure supplémentaire : de catégorie, de groupe abélien, d'éléments d'un ensemble comme $2 = \{0, 1\}$, et ainsi de suite. Pour ce faire, nous faisons des $\mathcal{C}(c, d)$ non pas des ensembles, mais les objets d'une autre catégorie !

Nous obtenons alors respectivement des 2-catégories comme **CAT**, des catégories additives comme **Ab** ou R-**Mod** ainsi que des ensembles préordonnés. On peut aussi avoir une représentation interne des $\mathcal{C}(c, d)$ en tant qu'objets exponentiels $d^c \in \mathcal{C}$.

Dans chaque cas, il nous faut définir des opérations de composition, ainsi que des identités. Voyons : pour **CAT**, les objets de morphismes $\mathbf{CAT}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ sont les catégories de foncteurs attendues ; notre composition est le foncteur

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$$

qui associe (G, F) à, bien sûr, la composition GF ; le foncteur identité est l'élément $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : 1 \to \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$.

Dans le cas des catégories additives, disons $\mathbf{Ab} \simeq \mathbb{C}$-**Mod**, le produit libre $G \times H$ n'est pas ce que nous avons en tête pour la définition de la composition. L'objet qui représente réellement la composition d'homomorphismes est le produit tensoriel. En effet, nous avons l'adjonction

$$\mathrm{Hom}(G \otimes H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Hom}(H, K))$$

résumant le fait que $G \otimes K$ représente les applications bilinéaires $G \times H \to K$. Ici, l'objet identité n'est pas l'objet terminal, soit le groupe trivial, puisqu'il n'existe toujours qu'une seule application $0 : 1 \to G$; en fait, nous avons une représentation

$$\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, G) \simeq U(G)$$

où $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ est le foncteur d'ensemble sous-jacent à un groupe, donnée par

$$(\phi : \mathbb{Z} \to G) \mapsto \phi(1)$$

puisque $\phi(n) = n \times \phi(1)$. L'élément identité est alors donné par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\to \mathrm{Hom}(G, G) \\ n &\mapsto (g \mapsto g). \end{aligned}$$

La notion que nous avons besoin est celle d'une *catégorie monoïdale*, décrite sommairement de la façon suivante :

Définition 2.1. On dit que $\mathcal{V}$ est une *catégorie monoïdale* si elle est munie d'un foncteur $\otimes : V \times V \to V$ et d'un objet I donnant aux objets de V une structure de monoïde *à isomorphisme près*, via les isomorphismes naturels

$$l_A : I \otimes A \to A, \quad r_A : A \otimes I \to A$$

$$a_{ABC} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C);$$

nous entendons par ceci que tous les diagrammes formels finis composés de ces isomorphismes commutent.

La discussion précédente est résumée en disant que I est l'objet terminal dans toute catégorie cartésienne, mais que $I = \mathbb{Z}$ dans **Ab**.

Théorème 2.2 (Cohérence)**.** *Une catégorie $\mathcal{C}$ est monoïdale si et seulement si le diagramme pentagonal*

$$\begin{tikzcd}
& (W \otimes A) \otimes (B \otimes C) \arrow[dr, "a"] & \\
((W \otimes A) \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "a"] \arrow[d, "a\otimes 1"] & & W \otimes (A \otimes (B \otimes C)) \\
(W \otimes (A \otimes B)) \otimes C \arrow[rr, "a"] & & W \otimes ((A \otimes B) \otimes C) \arrow[u, "1\otimes a"']
\end{tikzcd},$$

commute pour tout $W, A, B, C \in \mathcal{C}$, et le diagramme triangulaire

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r\otimes 1"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1\otimes l"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}.$$

commute pour tout $A, B \in \mathcal{C}$.

Preuve. Voir *Category Theory for the Working Mathematician*[3] Ch. VII. □

Une catégorie monoïdale est dite *stricte* si l, r, a sont des égalités. Une version du théorème de cohérence est que toute catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte. Par conséquent, on se permettra de confondre certains objets isomorphes.

Définition 2.3. Soit $\mathcal{V}$ une catégorie monoïdale. Une catégorie $\mathcal{C}$ *enrichie sur* $\mathcal{V}$ (ou $\mathcal{V}$-catégorie) est un ensemble $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, un *objet de morphismes* $\mathcal{C}(A, B)$ pour chaque paire $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une *loi de composition* $M_{ABC} : \mathcal{C}(B, C) \otimes \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, C)$ pour chaque triplet, ainsi qu'une *identité* $j : I \to \mathcal{C}(A, A)$ pour chaque objet ; tels que la composition soit associative via a et j une identité via I.

Les exemples de l'introduction sont tous des exemples de catégories enrichies : une 2-catégorie est enrichie sur **CAT**, une catégorie additive est enrichie sur **Ab**, et un ensemble préordonné est enrichi sur **2**. Il faut se rappeler aussi que tout ceci se doit d'être une généralisation de la théorie des catégories ordinaire ; en effet, un voit qu'une catégorie localement petite est tout simplement une catégorie enrichie sur **Set** ! On pressent par exemple un théorème style Yoneda, mais il nous faudra travailler pour avoir les définitions nécessaires.

On note que toute $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{C}$ a sa *catégorie opposée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, enrichie sur $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ de façon évidente ; en effet les conditions monoïdales sont symétriques.

Définition 2.4. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ enrichies sur $\mathcal{V}$. Un $\mathcal{V}$*-foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une fonction $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ et pour chaque paire $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, un morphisme $F_{AB} : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(FA, FB)$ de $\mathcal{V}$, préservant l'identité et la composition. C'est-à-dire, les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(B, C) \otimes \mathcal{C}(A, B) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "F \otimes F"] & \mathcal{D}(A, C) \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{D}(FB, FC) \otimes \mathcal{D}(FA, FB) \arrow[r, "M"] & \mathcal{D}(FA, FC)
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(A, A) \arrow[dd, "F"] \\
I \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \\
 & \mathcal{D}(FA, FA)
\end{tikzcd}.$$

La définition des transformations $\mathcal{V}$-naturelles est aussi évidente, et on écrit $\mathcal{V}-\mathrm{nat}(F, G)$ pour l'ensemble de transformations $\mathcal{V}$-naturelles entre F et G. Il est moins évident comment définir des objets de transformations naturelles donnant à $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ un enrichissement sur $\mathcal{V}$; nous verrons cela plus tard.

Avec ces deux notions, nous trouvons une 2-catégorie $\mathcal{V} - \mathbf{CAT}$.

3 Fermeture

Nous nous restreindrons ci-après au cas où $\mathcal{V}$ est *symétrique* :

Définition 3.1. On dit qu'une catégorie monoïdale $\mathcal{V}$ est *symétrique* s'il existe un isomorphisme naturel $c_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ tel que $c^2 = \mathrm{id}$, compatible avec a et I.

Il n'est pas suffisant que $A \otimes B$ soit simplement isomorphe à $B \otimes A$ (ce qui serait une catégorie monoïdale *tressée*), il faut que cet isomorphisme soit, d'une certaine façon, canonique. On peut alors voir les objets de $\mathcal{V}$ comme faisant partie d'un monoïde non-seulement commutatif, mais *le plus commutatif possible*.

Dans certains cas, on remarque qu'une catégorie symétrique peut être enrichie sur elle-même. C'est le cas de catégories cartésiennes comme **CAT**, qui est elle-même une 2-catégorie, ainsi que de **Ab**, elle-même additive.

Définition 3.2. On dit qu'une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{V}$ est *fermée* si $- \otimes B : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ a un adjoint droit $[B, -] : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$; soit une correspondence ensembliste

$$[-] : \mathcal{V}(A \otimes B, C) \cong \mathcal{V}(A, [B, C])$$

naturelle en B et en C. On appelle cet adjoint le *hom interne*, dont la co-unité

$$e : [A, B] \otimes A \to B$$

est appelée *évaluation*, par analogie avec l'évaluation de fonctions en une variable.

Proposition 3.3. *Si $\mathcal{V}$ est monoïdale symétrique fermée, alors $A \otimes -$ a aussi un adjoint droit, qui coïncide avec le hom interne $[A, -]$.*

Preuve. Appliquer l'isomorphisme naturel c. □

Il y a alors une comparaison évidente à faire avec les catégories cartésiennes. Voici quelques différences clé :

(1) L'identité n'est pas nécessairement l'objet terminal ; on a cependant que $\mathcal{V}(A, B) \cong \mathcal{V}(I, [A, B])$;

(2) Il n'existe pas toujours de morphisme diagonal $A \to A \otimes A$, ou même de projections $p_i : A_1 \otimes A_2 \to A_i$; ceci est évident lorsqu'on pense au produit tensoriel de **Ab**.

La logique interne des catégories monoïdales symétrique fermées est une logique dite *linéaire*, que l'on peut voir comme un affaiblissement de la logique intuitionniste au sens que l'on ne peut plus copier et détruire de l'information comme bon nous semble. On voit les objets et morphismes non pas comme des propositions et des preuves mais comme des ressources et des transformation. La logique linéaire admet un chouette calcul visuel via les *string diagrams*. Aussi, la logique linéaire encode bien la logique dite *quantique*, entre autres parce que la catégorie des espaces de Hilbert de dimension finie est monoïdale symétrique fermée via le produit tensoriel usuel ; l'absence de diagonales reflète l'impossibilité du clonage quantique[1].

Proposition 3.4. *Toute catégorie monoïdale symétrique fermée est canoniquement enrichie sur elle-même via le hom interne* $[A, B]$.

Afin d'alléger la notation, nous avons décidé d'utiliser $\mathcal{V}$ pour désigner à la fois la catégorie ordinaire et la $\mathcal{V}$-catégorie. On devinera de quelle structure on parle, selon le contexte. Nous utiliserons $\mathcal{V}(A, B)$ pour l'*ensemble* de morphismes et $[A, B]$ pour l'objet de $\mathcal{V}$.

Pour trouver la loi de composition, on regarde l'adjonction d'ensembles

$$\mathcal{V}([B, C] \otimes [A, B] \otimes A, C) \cong \mathcal{V}([B, C] \otimes [A, B], [A, C])$$

(en faisant fi du parenthésage) ; or, on peut trouver un morphisme à gauche en appliquant deux fois l'évaluation ! La loi de composition est la transposée de ce morphisme.

Ceci fait en particulier de

$$\lambda A = \mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{V} \quad \text{et de} \quad yA = \mathcal{C}(-, A) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$$

des $\mathcal{V}$-foncteurs, appelés *foncteurs représentés par* A, respectivement covariants et contravariants. En effet, on par exemple que $\mathcal{C}(-, A)$ induit une application

$$yA_{CB} : \mathcal{C}(C, B) \to [\mathcal{C}(B, A), \mathcal{C}(C, A)]$$

comme la transposée $[M]$ de la composition

$$M : \mathcal{C}(C, B) \otimes \mathcal{C}(B, A) \to \mathcal{C}(C, A)$$

de $\mathcal{C}$. De plus, de $f : A \to B$ on peut trouver $f^* : [A, C] \to [A, C]$ en appliquant le foncteur ordinaire $[-, C] : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$.

Théorème 3.5 (Yoneda, version faible)**.** *Soient $\mathcal{V}$ monoïdale symétrique fermée et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ un $\mathcal{V}$-foncteur. Il y a une bijection d'ensembles*

$$\mathcal{V}\text{−nat}(\mathcal{C}(A,-), F) \cong \mathcal{V}(I, FA).$$

pour tout $A \in \mathcal{C}$.

La preuve est en fait (sans surprise) un calque du cas des catégories localement petites. À une transformation $\mathcal{V}$-naturelle $\alpha : \mathcal{C}(A,-) \Rightarrow F$ on peut associer l'élément

$$\alpha_A(\mathrm{id}_A) : I \xrightarrow{\mathrm{id}_A} \mathcal{C}(A,A) \xrightarrow{\alpha_A} FA,$$

et à un élément $x : I \to FA$ on définit la composante α_B comme la composition

$$\mathcal{C}(A,B) \xrightarrow{F_{AB}} [FA, FB] \xrightarrow{x^*} [I, FB] \xrightarrow{i} FB\ .$$

On peut alors vérifier que ces applications sont inverses l'une de l'autre. Pour la preuve détaillée, voir [2].

En prenant $F = \lambda B$, on trouve que $\lambda A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ induit une bijection

$$\mathcal{V}\text{-nat}([A,-],[C,-]) \cong \mathcal{V}(I,[A,C]),$$

de même pour y par dualité.

note personnelle. *À une catégorie $\mathcal{C}$ enrichie sur $\mathcal{V}$ symétrique fermée, on peut parfois associer une catégorie ordinaire $\mathcal{C}_0$ en prenant comme ensembles de morphismes*

$$\mathcal{C}_0(A,B) = \mathcal{V}(I, \mathcal{C}(A,B)).$$

Il s'agit en effet de la composition du $\mathcal{V}$-foncteur représentable $\mathcal{C}(-,-)$ suivi du foncteur ordinaire $\lambda I : \mathcal{V} \to$ **Set***, donc on passe d'une $\mathcal{V}$-catégorie à une* **Set***-catégorie. Il nous faudrait élaborer une théorie des foncteurs de changement de base, puisqu'ici on peut utiliser le fait que λI est parfois un foncteur monoïdal faible (*lax monoidal functor*, en anglais). C'est-à-dire qu'il ne préserve pas strictement la structure monoïdale, mais nous devons avoir une transformation naturelle*

$$\alpha : \mathcal{V}(I,A) \times \mathcal{V}(I,B) \to \mathcal{V}(I, A \otimes B)$$

et nous avons certainement un morphisme canonique

$$\mathrm{id} : 1 \to \mathcal{V}(I,I);$$

tels que les conditions d'associativité etc sont respectées. Tout ceci est évident dans **Ab** *par la remarque que* $\mathbf{Ab}(\mathbb{Z}, G) \simeq U(G)$ *et que le produit tensoriel de groupes est quotient du produit de groupes.*

Alors, la composition est donnée par

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_0(B,C) \times \mathcal{C}_0(A,B) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "M_0"'] & \mathcal{V}(I, \mathcal{C}(B,C) \otimes \mathcal{C}(A,B)) \arrow[d, "M_*"] \\ & \mathcal{V}(I, \mathcal{C}(A,C)) = \mathcal{C}_0(A,C) \end{tikzcd} .$$

Dans le cas de $\mathcal{V}$ symétrique fermée, on trouve que $\mathcal{V}_0 \cong \mathcal{V}$.

4 $\mathcal{V}$-CAT, la $\mathcal{V}$-CAT-catégorie

(*attention, cette section est incomplète vis-à-vis les fondements de tailles d'ensembles*)

Définition 4.1. Pour $\mathcal{V}$ symétrique, la catégorie $\mathcal{V}$-**CAT** est monoïdale symétrique aussi. À deux $\mathcal{V}$-catégories $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ on associe la $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ telle que

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$$

et

$$(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})((C, D), (C', D')) = \mathcal{C}(C, C') \otimes \mathcal{C}(D, D').$$

La composition est définie comme $M_{\mathcal{C}} \otimes M_{\mathcal{D}}$, après avoir adéquatement permuté les éléments du produit tensoriel.

Afin de développer une version forte du théorème de Yoneda, où la correspondence sera naturelle, il faut définir un $\mathcal{V}$-foncteur

$$\lambda : \mathcal{C} \to \mathcal{V}^{\mathcal{C}}$$
$$A \mapsto \lambda A = \mathcal{C}(A, -);$$

or, nous avons définit $\mathcal{V}$-nat(F, G) comme des ensembles, alors la catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{V}$ n'est pas (encore) une $\mathcal{V}$-catégorie.

Comme notre philosophie est de généraliser la théorie des petites catégories, voyons voir si nous pouvons décrire les transformations naturelles dans le langage interne de **Set** en tant que catégorie localement cartésienne.

Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs (ordinaires) et $\alpha : F \Rightarrow G$. On veut une collection $\alpha_X : FX \to GX$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ telle que, pour tout $f : A \to B$ dans

$\mathcal{C}$, $\alpha_{FB}(Ff) = (Gf)\alpha_{FA}$. On pourrait alors exprimer l'ensemble des transformations naturelles comme

$$\left\{ \alpha \in \prod_{A \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(FA, GA) \;\middle|\; \forall (A, B \in \mathcal{C})\, \forall (f \in \mathcal{C}(A, B)),\ \alpha_{FB}(Ff) = (Gf)\alpha_{FA} \right\},$$

ce qui s'exprime comme l'égalisateur de

$$\textstyle\prod_{A \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(FA, GA) \overset{\rho}{\underset{\sigma}{\rightrightarrows}} \prod_{A,B \in \mathcal{C}} [\mathcal{D}(FA, FB), \mathcal{D}(GA, GB)]\ , \tag{1}$$

aussi appelé la *fin* de $\mathcal{D}(F-, G-)$ (*end* en anglais).

En supposant maintenant que F, G soient des $\mathcal{V}$-foncteurs et que cet égalisateur existe toujours dans $\mathcal{V}$ (i.e. $\mathcal{V}$ est complet), on peut les choisirs comme objets de morphismes dans notre $\mathcal{V}$-catégorie de foncteurs $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$. Intuitivement, on trouve que

Proposition 4.2. *Si $\mathcal{V}$ est complète, alors $\mathcal{V}$-**CAT** est fermée.*

Voir [2] pour la preuve détaillée.

La version forte du théorème de Yoneda enrichie nous dit que

Théorème 4.3 (Yoneda version forte)**.** *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ et $O \in \mathcal{C}$. Alors*

$$FK \cong [\mathcal{C}, \mathcal{V}](\mathcal{C}(O, -), F)$$

en tant qu'objets de $\mathcal{V}$.

Preuve. On a $F_{OA} : \mathcal{C}(O, A) \to [FO, FA]$, d'où sa transformée

$$\alpha_A : FO \to [\mathcal{C}(O, A), FA]$$

via l'isomorphisme

$$\mathcal{V}(A, [B, C]) \simeq \mathcal{V}(B, [A, C]).$$

Il est donc clair que $\alpha = \prod \alpha_A : FO \to \prod_A [\mathcal{C}(O, A), FA]$ fait commuter le diagramme. Maintenant, considérons

$$\beta_A : X \to [\mathcal{C}(O, A), FA]$$

$\mathcal{V}$-naturelle (donc elle fait commuter le diagramme (1)), ainsi que sa transposée

$$\beta'_A : \mathcal{C}(O, A) \to [X, FA],$$

$\mathcal{V}$-naturelle aussi. Par Yoneda faible, elle s'exprime alors comme la composée

$$\mathcal{C}(O, A) \to_{F_{OA}} [FO, FA] \to_{\eta^*} [X, FA],$$

c'est-à-dire que β_A se factorise par un unique $\eta : X \to FO$. Par conséquent, non seulement FO fait commuter le diagramme (1), mais il en est l'égalisateur. □

Références

[1] John C. Baez and Mike Stay. Physics, topology, logic and computation : A rosetta stone. 2009.

[2] G. M. Kelly. Basic concepts of enriched category theory. *Reprints in Theory and Applications of Categories [electronic only]*, 2005, 01 2005.

[3] Saunders Mac Lane. Categories for the working mathematician. 5, 2013.